Az infravörös tartományú optikai rendszerek optikai átviteli függvényeinek rendszertechnikai származtatása

Prof.Dr. Ábrahám György

Az időbeli vagy dinamikai rendszerek vizsgálatával foglalkozó rendszertechnika kialakította azt az általános tárgyalásmódot, amit analógiaként felhasználhatunk az optikai átviteli függvények fogalmának bevezetésénél. A rendszertechnika általánosította azokat a villamosságtanban, mechanikában, hőtanban stb. hasonlóan tárgyalható rendszerelemeket, amelyekre egyaránt jellemző, hogy időben változó bemeneti jelekre $f(t)$ időben változó kimeneti jeleket $g(t)$ hoznak létre ún. válaszfüggvényként.

Definiálásra került az átviteli függvény T(ω), amely a kimeneti jelek és a bemeneti jelek Laplace-transzformáltjainak F(ω), illetve G(ω) hányadosa. (1.24. ábra - Az optikai átviteli függvény, mint a rendszertani átviteli függvény analógiája)

Mivel az ún. impulzusfüggvény, vagy Dirac-függvény speciális Laplace-transzformálttal rendelkezik

$\mathcal{L}$ [δ (t)] = 1), így az átviteli függvény az erre adott válaszfüggvény transzformáltjával egyenlő.

Mindezek az infravörös tartományú optikai rendszerek esetében is felhasználhatók. Itt a Laplace-transzformáció helyett elegendő a Fourier-transzformációt használni:

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \tag{1.49}$$

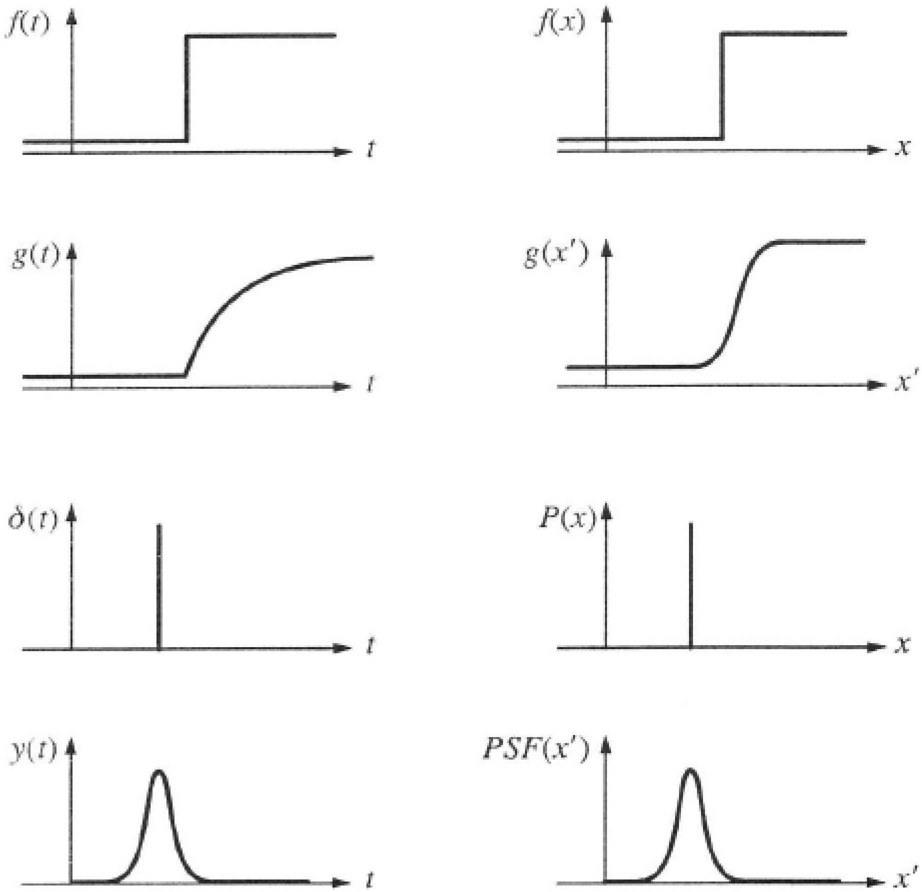
Míg az időbeli rendszereknél a vízszintes tengelyen a t szerepel, addig az infravörös tartományú optikai rendszereknél a helykoordináta x. Időbeli rendszereknél $\omega=2\pi f$, ahol f a frekvencia, vagyis a másodpercenkénti periódusok száma (1.49).

Infravörös tartományú optikai rendszereknél

$$\omega=2\pi v$$

A *v* a térfrekvencia, vagyis a milliméterenkénti periódusok száma.

Infravörös tartományú optikai rendszereknél a Dirac-bemenetnek egy fénylő csillag felel meg a sötét égbolton, amelyre $\mathcal{F}\left[P(x)\right]=1$, így ennek válaszfüggvényét Fourier-transzformálva előállítjuk az optikai átviteli függvényt (OTF). A Fourier-transzformáció képletéből látható, hogy az eredmény komplex függvény lesz, amelyet Euler-alakban ábrázolva abszolút értékre és fázisra bonthatjuk.



Az infravörös tartományú optikai rendszerek **optikai átviteli függvénye, mint a rendszertani átviteli függvény analógiája**

$$T(\omega)=\frac{G(\omega)}{F(\omega)} \qquad OTF(\omega)=\frac{G(\omega)}{F(\omega)}$$

$$G(\omega)=\mathcal{L}\left[g(t)\right] \quad G(\omega)=\mathcal{F}\left[g(x')\right]$$

$$G(\omega)=\mathcal{L}\left[f(t)\right] \quad F(\omega)=\mathcal{F}\left[f'(x)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=1 \qquad \mathcal{F}\left[P(x)\right]=1$$

$$T(\omega)=\mathcal{L}\left[y(t)\right] \quad OTF(\omega)=\mathcal{F}\left[PSF(x')\right]$$

Hasonló felbontással találkozunk a rendszertechnikában, ahol az abszolút érték részét és a fázisrészt egymás alatt a frekvencia függvényében szokás ábrázolni. Az optikában is ezt tesszük.

$$OTF(\nu)=MTF(\nu)e^{-iPTF(\nu)}$$

Az OTF az MTF és a PTF jelölést a nemzetközi irodalom miatt tartjuk meg (optical transfer function, modulation transfer function, illetve phases transfer function), utóbbit szokás még egyszerűen $\phi(\nu)$-vel jelölni.

Definicíószerűen MTF(0) = 1 vagyis nulla térfrekvencián a modulációs átviteli függvény értéke egységnyi, míg PTF(0) = 0, vagyis a fázisátviteli függvényérték ugyanott zérus.

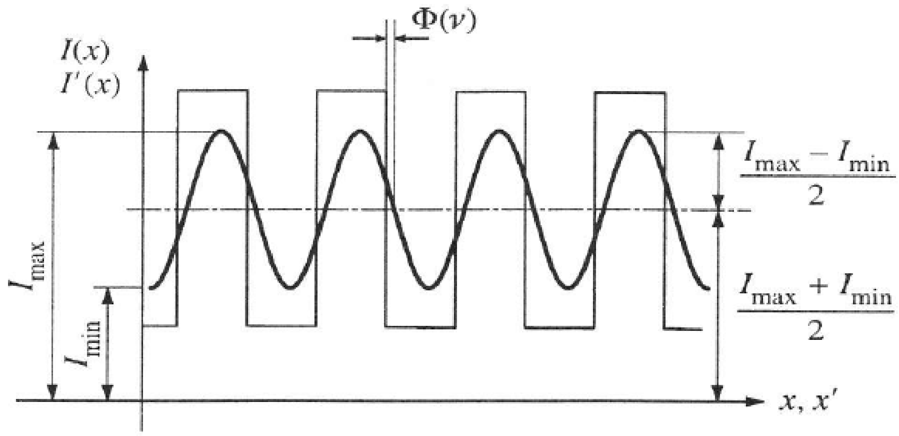
Valamely tetszőleges tárgy $f(x)$ leképzésekor keletkező kép $g(x')$ intenzitáseloszlását a leképző optikai rendszer OTF-jének ismeretében úgy kaphatjuk meg, hogy az összefüggésből kifejezzük. $G(\omega)$-t és azt inverz-Fourier-transzformáljuk:

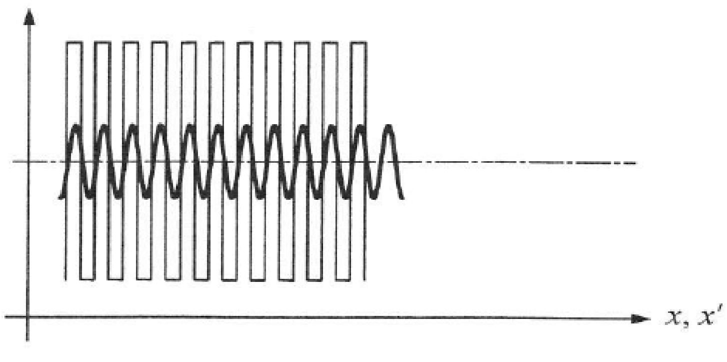
$$g(x')=\mathcal{F}^{-1}\left[G(\omega)\right]=\mathcal{F}^{-1}\left[OTF(\omega)\mathcal{F}\left[f(x)\right]\right]$$

Egy infravörös optikai rendszer optikai átviteli függvényét tehát egyszer kell csak meghatározni, azután bármely tárgy képét segítségével kiszámíthatjuk. Eredményünk tartalmazni fogja a képalkotási hibák hatását is.

Az infravörös optikai rendszer optikai átviteli függvények szemléletes magyarázata

Tekintsük az alábbi ábrán lévő csíkos tárgy képalkotása. szerinti sűrűn csíkos tárgyat. A négyszögszerű jelsorozat mutatja a tárgy fényeloszlását. A kép fényeloszlását rárajzoltuk a tárgyéra (egységnyire normálva a nagyítást). Látható, hogy a képen a sarkos fényeloszlás helyett színusszerű jelenik meg, sőt a jelsorozat amplitudója sem olyan nagy mint a tárgyé.





.

Egy csíkos tárgy képalkotása

A tárgy fényeloszlássa a négyszög-, a képe pedig a szinusszerű. A térfrekvencia növelésével a képkontraszt csökken

Megfigyelhető az is, hogy a kép- és tárgyjel között egy kis $\Phi(\upsilon)$ nagyságú fáziseltolódás is van. A jel amplitúdócsökkenés és a fáziseltolódás általában annál nagyobb, minél sűrűbb, vagyis nagyobb térfrekvenciájú a tárgyfüggvény.

Kontrasztnak nevezzük a sötét és a világos részek viszonyát. E viszonyt a híradástechnikai moduláció fogalomnak megfelelően a jel középvonalától mért amplitúdó és a középvonalnak a vízszintes tengelytől mért magassága hányadosaként definiáljuk.

$$K = \frac{\frac{I_{\max} - I_{\min}}{2}}{\frac{I_{\max} + I_{\min}}{2}} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

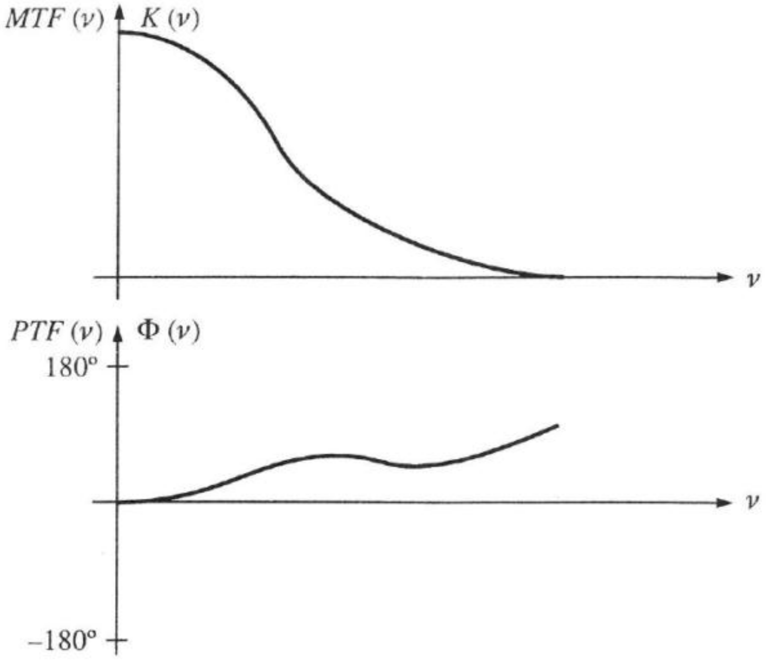
Látható, hogy a kontraszt maximális értéke egységnyi lehet, általában pedig 0-1 közé esik. (Akkor lehetne egységnyi, vagyis 100%-os, ha az $I_{min} = 0$ lenne, ez pedig akkor állhat elő, ha az optikai rendszer a kép fekete területére semmilyen fényt nem juttatna).

Az ábrából az is látható, hogy egyetlen élátmenet leképzésének hiányossága miatt áll elő a kontrasztcsökkenés, hiszen a rendszer csak bizonyos meredekséggel képes átvinni a hirtelen emelkedő négyszögjelet – így minél sűrűbb a négyszögjelsorozat, annál kisebb értékre tud felemelkedni a válaszjel, mire a négyszöggel ismét csökkenni kezd. Tehát a térfrekvencia növekedésével a kontraszt csökkenni fog.

Ha a kontraszt csökkenését a térfrekvencia függvényében ábrázoljuk, megkapjuk a kontrasztátviteli vagy modulációs átviteli függvényt.

A kővetkező ábra szerinti két függvény nem más, mint az $OTF(\upsilon)$ komplex optikai átviteli függvény abszolút értéke és fázisa.

Persze egy valóságos tárgy általában nem periodikus struktúrájú. Mint a függvénytanból tudjuk, felírható azonban függvénysorként, vagyis különféle frekvenciájú összetevők összességeként. Miután az egyes összetevő frekvenciák átvitele nem azonos, ezért a tárgy leképzése nem lesz ideális. Általában igaz, hogy a magasabb frekvenciákon csökken a kontraszt és növekszik a fázishiba. Ez olyan, mint a rendszertechnikában a felülvágó szűrők hatása.



A modulációs átviteli függvény és a fázisátviteli függvény

Itt a függőleges tengely léptéke szög, mivel egyetlen periódust 360º-nak tekintünk, és ehhez képest léptékezzük a fáziseltolódást.

A fázishiba jelentéséhez megjegyezzük, hogy azt úgy kell elképzelni, mintha az egyes képrészletek (pl. a négyszöggel felfutó vagy lefutó éle) nem pontosan oda kerülne a képen, ahová ideális képszerkesztés útján.

A vízszintes tengelyen a υ térfrekvencia található ciklus/mm egységben. Az ábra alatt szokás ábrázolni a fázishiba változását szintén a térfrekvencia függvényében.

Az apertúrafüggvény és kapcsolata az optikai átviteli függvénnyel

Az infravörös fény hullámtani leírásakor elektromágneses rezgésekről, hullámokról beszélünk. Az elektromos térerőt, amelynek változásaként is leírhatjuk a fényt, a következő képlettel szemléltethetjük:

$$E_0(t) = U_0 e^{i(\omega t+\varphi)} = U_0 \cos(\omega t+\varphi) + iU_0 \sin(\omega t+\varphi)$$

Ha összevonjuk az időtől független tagokat: $E_0(t) = U_0 e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}$ alakot kapjuk.

Ebben az alakban jelöljük E-vel az időtől független részt:

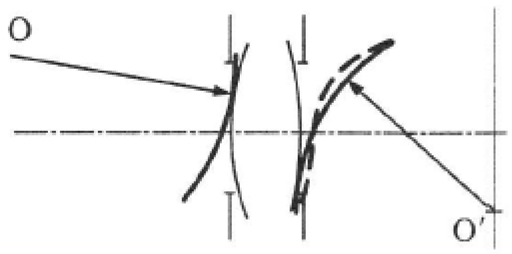
$$E = U_0 e^{i\varphi}$$

és nevezzük ezt komplex amplitúdónak, hiszen az időbeli rezgésnek ez jelenti az amplitúdóját.

Itt U_0 a rezgés amplitúdója, *t* az idő, *j* a kezdő fázisszög, *i* az imaginárius egység. Az összefüggés valós része a cosinuszos terjedés leírását szemlélteti.

A továbbiakban a komplex amplitúdónak lesz csak jelenősége, mert a másik tényező csak az időtől függ, mi pedig a helytől függő viszonyokat vizsgáljuk.

Tekintsük az alábbi ábrát!



A hullámaberráció értelmezése

Képzeljük el az optikai leképzést úgy, mintha a lencsébe bemenő fényhullám komplex amplitúdója megszorzódna egy – a lencsére jellemző ún. pupillafüggvénnyel, és így alakulna ki a kimeneten a fényhullám komplex amplitúdója. A pupillafüggvényre vonatkozóan két dolgot kell számításba vennünk. Egyrészt lehet a lencsének *τ(u,v)* átbocsátási tényezője, másrészt megváltoztathatja a fényhullámok gömbszerűségét, amelyet az 0' középponttól rajzolt referenciagömbtől való *W(u,v)* eltéréssel vehetünk figyelembe. Ezekkel a pupillafüggvény

$$P(u,v) = \sqrt{\tau(u,v) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}W(u,v)}}$$

Itt a négyzetgyök értelme az intenzitás képzésénél látható, amikor is négyzetre emelés miatt eltűnik.

λ a fény hullámhossza,

$\frac{2\pi}{\lambda}W(u,v)$ pedig a *W(u,v)* hatására létrejövő fáziseltolódás.

A leképzés síkjában a fényhullám komplex amplitúdója egydimenziós esetben:

$$E(x') = \int_{-\infty}^{\infty} P(u) e^{i2\pi uX'} du - nak$$

adódik, amely összefüggésről felismerhető, hogy az nem más, mint egy Fourier-transzformáció!

Kimondható tehát, hogy a képsíkon a fényhullám komplex amplitúdója arányos a pupillafüggvény Fourier-transzformációjával.

Kétdimenziós esetre:

$$E(x',y') = \int_{-\infty}^{\infty}\int P(u,v) e^{-i2\pi(ux'+vy')} dudv$$

A képsíkon egy pont képének intenzitását úgy kaphatjuk meg, ha az amplitúdót ismerjük, hogy azt négyzetre emeljük, pontosabban, a komplex amplitúdó ismeretében

$$I(x'y') = E(x',y')E^*(x',y')$$

ahol *E*(x',y')* az *E(x',y')* komplex konjugáltját jelenti.

Mivel az infravörös optikai rendszer optikai átviteli függvénye a pontszórásfüggvény Fourier-transzformáltja,

$$OTF(v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int I(x', y') e^{-i2\pi(vx' + \mu y')} dx'dy'$$

A behelyettesítéseket elvégezve, egydimenziósan írva:

$$OTF(v) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u) P^*(u) du$$

Miután az ilyen összefüggést autokorrelációnak nevezzük, kijelenthető, hogy az infravörös optikai rendszerek optikai átviteli függvényét a pupillafüggvény autokorrelációjaként is előállíthatjuk.

Aberrációmentes optikai rendszer átviteli függvénye

Ha az infravörös optikai rendszer aberrációmentes,

akkor *W(u,v)* hullámaberráció zérus, az $e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}W(u,v)}$ tényező egységnyi lesz, tehát P(u,v) kivihető az integrál jel elé. Az integrálandó függvény ekkor a pupilla területének és önmagával eltolt területének a metszete lesz az eltolás mértékének függvényében. Az eltolás mértéke pedig arányos a térfrekvenciával. (Mindez az autokoreláció miatt van így.)

Látható, hogy $\upsilon = 0$ esetén a terület maximális (ezt tekintjük 1-nek), amikor pedig a két kör érinti egymást, akkor a terület zérus lesz.

Ekkor a $u = \upsilon_{határ.}$vagyis a felbontóképesség elvi határa így határozható meg.

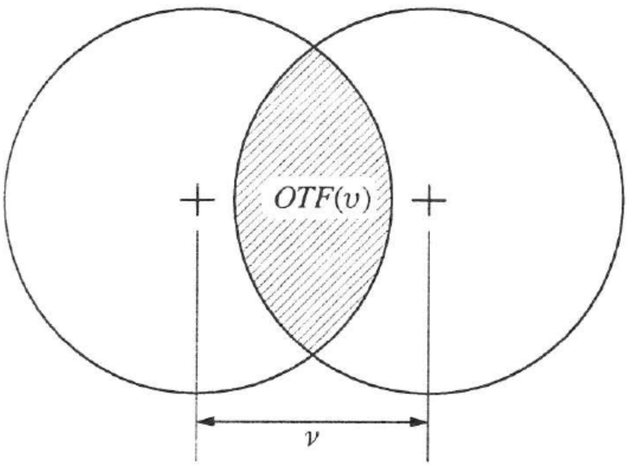
A függvény jellegét az alábbi összefüggéssel írhatjuk le:

$$OTF(\nu_{rel}) = \frac{2}{\pi}\left(\arccos \nu_{rel} - \nu_{rel}\sqrt{1-\nu_{rel}^2}\right)$$

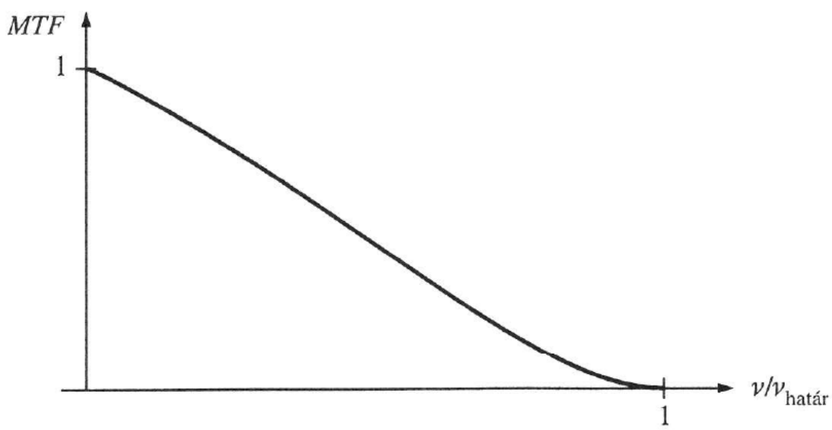
ahol

$\nu_{rel} = \dfrac{\nu}{\nu_{határ}}$ és $\nu_{határ} = \dfrac{1}{\lambda \dfrac{f}{D}}$

$\dfrac{f}{D}$ a lencse relative nyílása



Aberrációmentes rendszer átviteli függvényének szemléltetése



Aberrációmentes rendszer átviteli függvénye

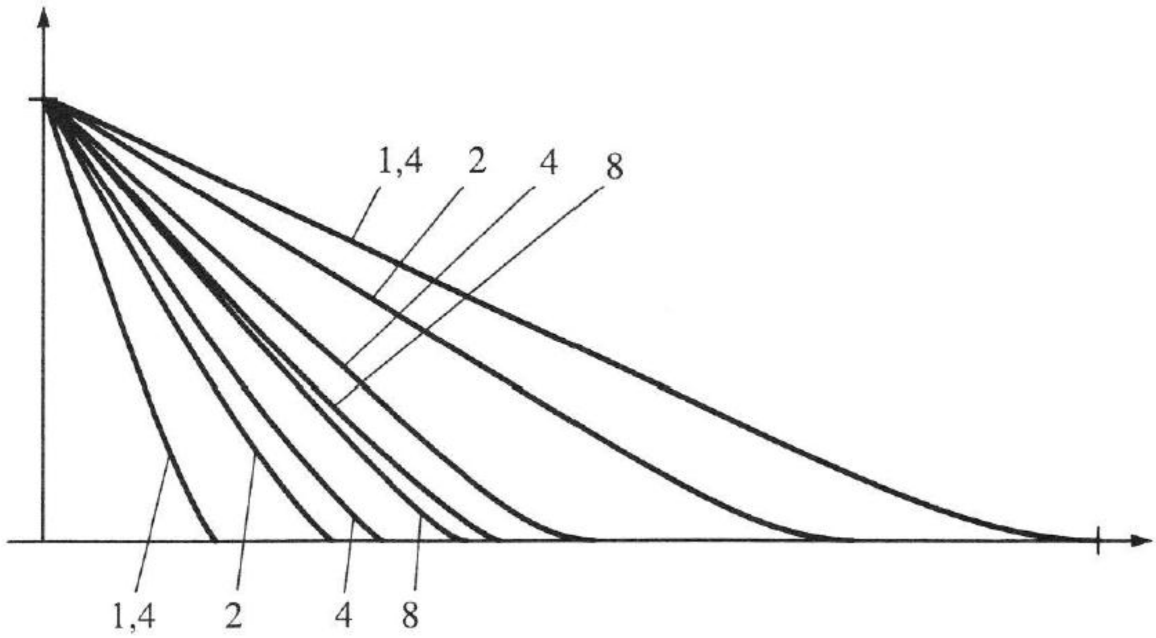
Kör Alakú apertura esetén

$$\nu_{határ} = \frac{1}{1{,}22\lambda \frac{f}{D}}$$

az 1,22 az elsőfajú Bessel-függvény miatt kerül be.

afenti ábra az aberrációmentes infravörös tartományú optikai rendszerek átviteli függvényét mutatja. Mivel a vízszintes tengely relatív koordinátájú, ebben ábrázolva az összes tengelyszimmetrikus optikai rendszer egyetlen függvénynyel ábrázolható.

A következő ábrán különböző mértékben rekeszelt optikai rendszer modulációs átviteli függvényei láthatóak.



Aberrációval terhelt és aberrációmentes rendszerek átviteli függvényei a rekeszelés függvényében

Feltüntettük az egyes rekeszállásoknak megfelelő aberrációmentes átviteli függvényeket is. Mint látható, két ellentétes folyamat játszódik le rekeszeléskor: egyrészt javult a rendszerek átviteli függvénye, hiszen kizáródnak a szélső nyalábok, csökken az aberráció, másrészt romlik az adott rekesznek megfelelő aberráció mentes átviteli függvény.

Az adott objektívnél 8-os rekeszértéknél összesimul a valós és az aberráció mentes átviteli függvény. Ha tovább rekeszelünk, akkor már csak romolhat a rendszer, hiszen az aberráció mentes függvény romlik, a valós pedig nem lehet jobb nála. Minden infra objektívnél van egy olyan rekeszérték, amelynél előáll ez a helyzet.

Miután az aberráció mentes infravörös optikai rendszereknél a képminőséget csak a diffrakció korlátozza, az ilyen rendszereket diffrakció korlátozott, vagy diffrakció limitált infravörös optikai rendszerekként is említi az irodalom.

Sorba kapcsolt rendszerek átviteli függvénye

Összetett infravörös optikai rendszereknél az eredő átviteli függvény az integrál alatt összeszorzódik. Két rendszerre:

$$OTF(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int P_1(u,v)P_1^*(u,v)P_2(u,v)P_2^*(u,v)\,du\,dv$$

Négy esetet különböztetünk meg:

1. Az egyes infravörös optikai rendszerek aberrációmentesek. Ekkor a W(u,v) hullámaberráció zérus, ezért az imaginárius tag elmarad, a határtérfrekvenciát a legkevésbé fényerős rendszer υ határa szabja meg, de a nagyobb fényerejű nem rontja az eredményt.
2. Az egyes infravörös optikai rendszerek aberrációval terheltek, ilyenkor minden elemi rendszer hat az eredőre.
3. A hullámaberációk a kitevőben algebrailag összegződnek (tehát javíthatják is egymást).
4. Ha az egyes összetevő infravörös optikai rendszerek között valódi kép jön létre, és azt leképezi a következő rendszer, akkor az MTF-ek összeszorzódnak, a PTF-ek pedig összeadódnak.